Physikalische Anwendungen – Elektrotechnik

Zum Mathematik-Lehrbuch „Notwendig und zunächst hinreichend“ (Shaker Verlag, Aachen) gibt es mehrere PDF-Dokumente mit ergänzenden Beispielen und Aufgaben, die die Anwendung der mathematischen Grundlagen in ingenieurrelevanten Bereichen zeigen.

Im vorliegenden Dokument finden Sie eine Sammlung von Beispielen und Aufgaben aus dem Bereich der Elektrotechnik:

Elektrisches Feld – KIRCHHOFFsche Sätze, OHMsches Gesetz – Spannungsmessung – Reihen- und Parallelschaltung – WHEATSTONEsche Brückenschaltung – Elektrische Leistung – Kondensator – Kondensatorladung – Ladung im Magnetfeld – Leiter im Magnetfeld

v1.0

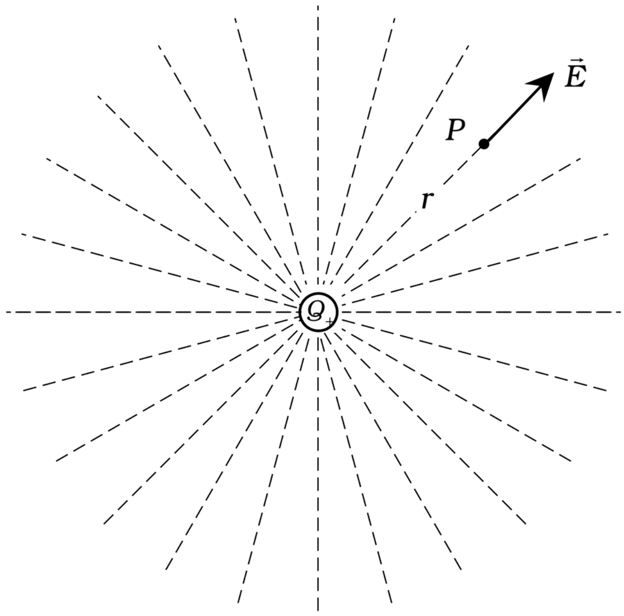
Die elektrische Elementarladung

$$\boxed{e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{Ampere} \cdot \text{Sekunde}}$$

ist eine Naturkonstante. Jede positive oder negative Ladung $Q_\pm$ ist ein ganzzahliges Vielfaches dieser Elementarladung:

$$Q_\pm = \pm N \cdot e$$

Um eine punktförmige Ladung Q_+ im Vakuum existiert ein kugelsymmetrisches **elektrisches Feld**



$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_+}{r^2} \vec{e}_r}$$

wobei $\vec{e}_r$ der radiale Einheitsvektor in dem Kugelkoordinatensystem ist, dessen Zentrum sich am Ort der Ladung Q_+ befindet.

$$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Ampere} \cdot \text{Sekunde}}{\text{Volt} \cdot \text{Meter}}$$

ist die **elektrische Feldkonstante**.

Bringt man eine **positive** punktförmige Probeladung q_+ in den Punkt P, so wirkt auf diese Probeladung die abstoßende Kraft

$$\boxed{\vec{F} = q_+ \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_+ Q_+}{r^2} \vec{e}_r}$$

Das ist das **COULOMBsche Gesetz**.

Soll die Probeladung q_+ zur Feldquelle Q_+ hin radial $\left(r_g \to r_k < r_g\right)$ verschoben werden, so ist dabei die Arbeit

$$W = \int_{r_g}^{r_k} \vec{F} \circ d\vec{r} = \frac{q_+ Q_+}{4\pi\varepsilon_0} \int_{r_g}^{r_k} \frac{1}{r^2}\, dr = \frac{q_+ Q_+}{4\pi\varepsilon_0} \left(-\frac{1}{r}\right)_{r=r_g}^{r=r_k} = \frac{q_+ Q_+}{4\pi\varepsilon_0} \left(-\frac{1}{r_k} + \frac{1}{r_g}\right)$$

erforderlich. Weil $r_k < r_g$ ist, wird $W < 0$. Die Probeladung q_+ hat im Abstand r_k von Q_+ eine größere potentielle Energie E_{pot} als im Abstand r_g, weil Arbeit aufzuwenden ist, um die Lageveränderung $\left(r_g \to r_k < r_g\right)$ zu erreichen.
(Analogie: Masse im Schwerkraftfeld: Heben einer Masse erhöht deren potentielle Energie, weil Arbeit gegen die Schwerkraft geleistet wird)

Die potentielle Energie der Probeladung im Feld der Ladung Q_+ ist also eine Funktion von r

$$\boxed{E_{pot}(r) = \frac{q_+ Q_+}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_g}\right)}$$

wobei die Wahl des Nullpunktes der potentiellen Energie willkürlich in den Abstand r_g gelegt wurde.

Als **Spannung** U zwischen zwei Punkten mit den Abständen r_A und r_B von der Feldquelle Q_+ ist definiert

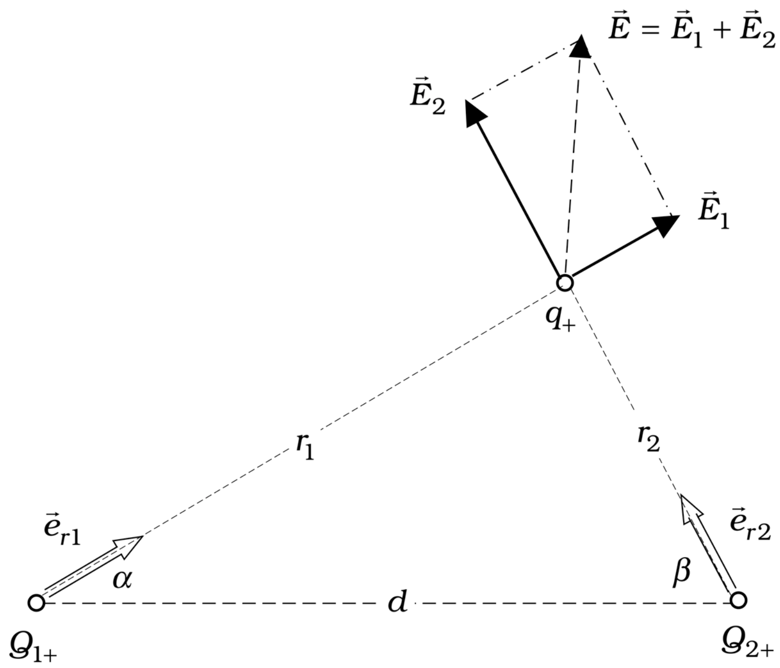
$$\boxed{U = \frac{E_{pot}(r_a) - E_{pot}(r_b)}{q_+} = \frac{Q_+}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right)}$$

Die Maßeinheit der Spannung ist also

$$\frac{1 \text{ Joule}}{1 \text{ Ampere} \cdot 1 \text{ Sekunde}} = \frac{1 \text{ Watt} \cdot 1 \text{ Sekunde}}{1 \text{ Ampere} \cdot 1 \text{ Sekunde}} = \frac{1 \text{ Watt}}{1 \text{ Ampere}} =: 1 \text{ Volt}$$

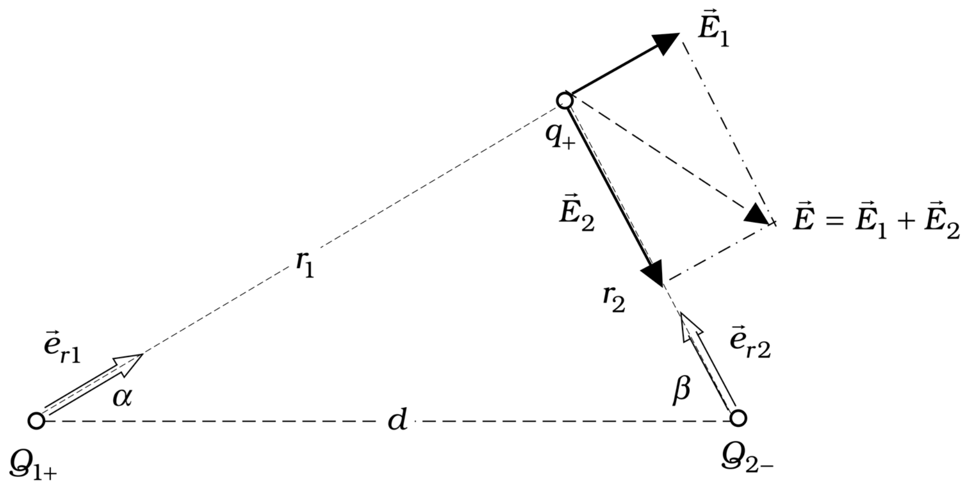
Die elektrischen Felder von zwei positiven Ladungen Q_{1+} und Q_{2+} überlagern sich.

$$\boxed{\vec{E} = \left(\frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \frac{Q_{1+}}{r_1^2} \vec{e}_{r1} + \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \frac{Q_{2+}}{r_2^2} \vec{e}_{r2}\right)}$$



Wird die Ladung Q_{2+} durch eine gleich große negative Ladung ersetzt, so ändert sich das elektrische Feld in

$$\boxed{\vec{E} = \left(\frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \frac{Q_{1+}}{{r_1}^2} \vec{e}_{r1} - \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \frac{\left|Q_{2-}\right|}{{r_2}^2} \vec{e}_{r2} \right)}$$



Der Feldvektor $\vec{E}$ ist jeweils Tangentenvektor an die Feldlinie am Ort der Probeladung q_+.

In einem elektrischen Leiter (z.B. einem Kupferdraht) werden elektrische Ladungen unter der Wirkung eines elektrischen Feldes transportiert. Eine Spannungsquelle (z.B. Batterie) mit einem $(+)$-Pol und einem $(-)$-Pol liefert die erforderliche potentielle Energie für die positiven Ladungsträger im elektrischen Leiter. Die Differenz der potentiellen Energien zwischen den beiden Polen ist die Quellenspannung U_Q.
Die durch einen Querschnitt des Leiters im Zeitintervall $(0 \to t)$ von $(+) \to (-)$ transportierte positive Ladung

$$Q(t) = \int_0^t I(t)\,dt$$

definiert die **Stromstärke**

$$\boxed{I(t) = \frac{d\,Q(t)}{dt}}$$

Die **Maßeinheit der Stromstärke** ist $1\ \text{Ampere}$; eine Grundeinheit neben Meter, Sekunde und Kilogramm. Bei der Stromstärke von

$$1\ \text{Ampere} = \frac{\text{N} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\text{Ampere} \cdot \text{Sekunde}}{\text{Sekunde}}$$

sind

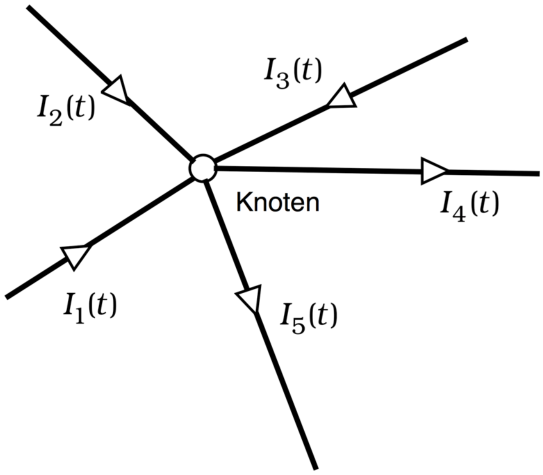
$$N = \frac{1}{1{,}6 \cdot 10^{-19}} = 6{,}25 \cdot 10^{18}$$

Elementarladungen in Bewegung.

Als **Stromrichtung ist** definiert **die Bewegungsrichtung der positiven Ladungen**.

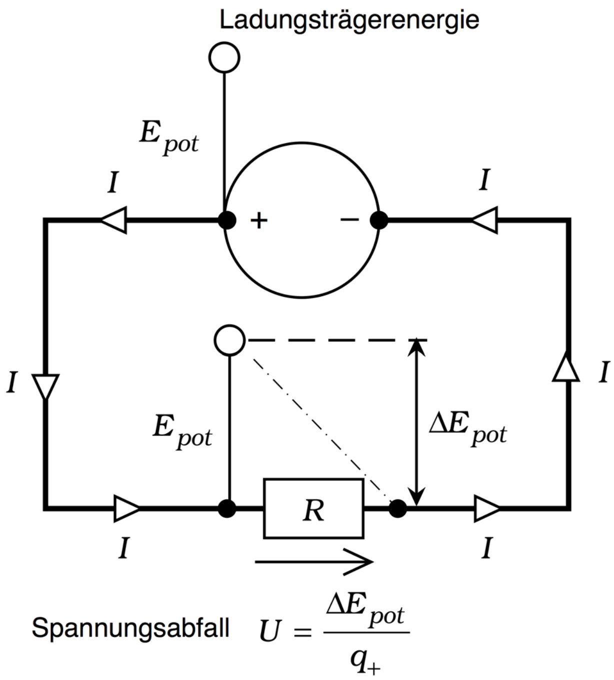
Wenn mehrere Stromleitungen, in denen die Ladungsströme in unterschiedlichen Richtungen fließen, in einem Knotenpunkt zusammengeführt werden, gilt der **KIRCHHOFFsche Knotenpunktsatz**:

Die Summe aller zu einem Knotenpunkt hinfließenden Ströme ist gleich der Summe der vom Knotenpunkt weg fließenden Ströme (Ladungserhaltung).



$$\boxed{\underbrace{I_1(t)+I_2(t)+I_3(t)}_{\text{zum Knoten hin}} = \underbrace{I_4(t)+I_5(t)}_{\text{vom Knoten weg}} \qquad \underbrace{I_1(t)+I_2(t)+I_3(t)}_{\text{zum Knoten hin}} - \underbrace{\big(I_4(t)+I_5(t)\big)}_{\text{vom Knoten weg}} = 0}$$

Fließt der Strom von einer Spannungsquelle durch einen Verbraucher,



so beruht die Abnahme der potentiellen Energie auf der Umwandlung elektrischer Energie in eine andere Energie (z.B. Wärme in einem OHMschen Widerstand).

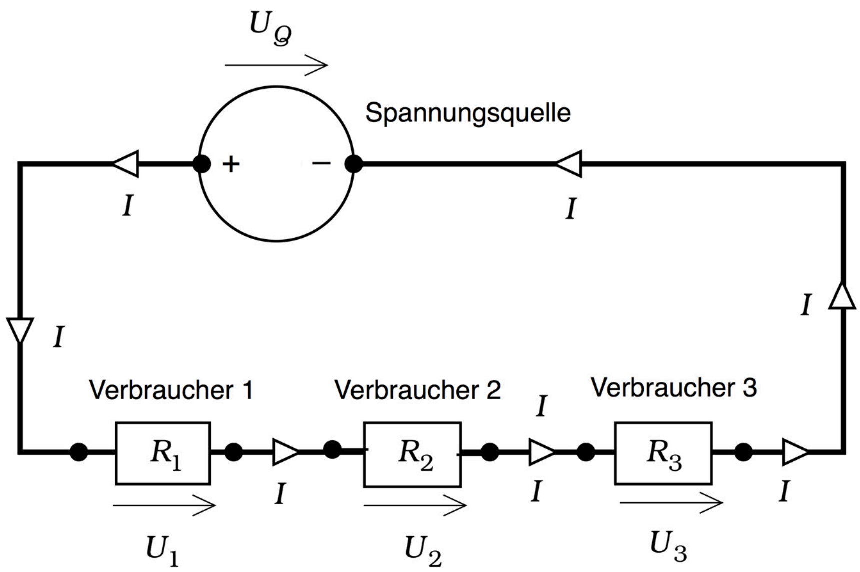
In der **Spannungsquelle** erhalten die Ladungsträger ihre potentielle Energie aus anderen Energien. Die von der Ladung insgesamt abgegebene Energie ist gleich der insgesamt zugeführten Energie. Bei einer Spannungsquelle mit beispielsweise drei Energieverbrauchern im Stromkreis gilt die Bilanz

$$\underbrace{\frac{\left(E_{pot}\right)_{zugeführt}}{q_+}}_{U_Q} = \underbrace{\frac{\left(\Delta E_{pot1}\right)_{abgegeben}}{q_+}}_{U_1} + \underbrace{\frac{\left(\Delta E_{pot2}\right)_{abgegeben}}{q_+}}_{U_2} + \underbrace{\frac{\left(\Delta E_{pot3}\right)_{abgegeben}}{q_+}}_{U_3}$$

U_Q nennt man die **Quellenspannung**.

In einem Stromkreis mit einer Spannungsquelle und drei Energieverbrauchern gilt also

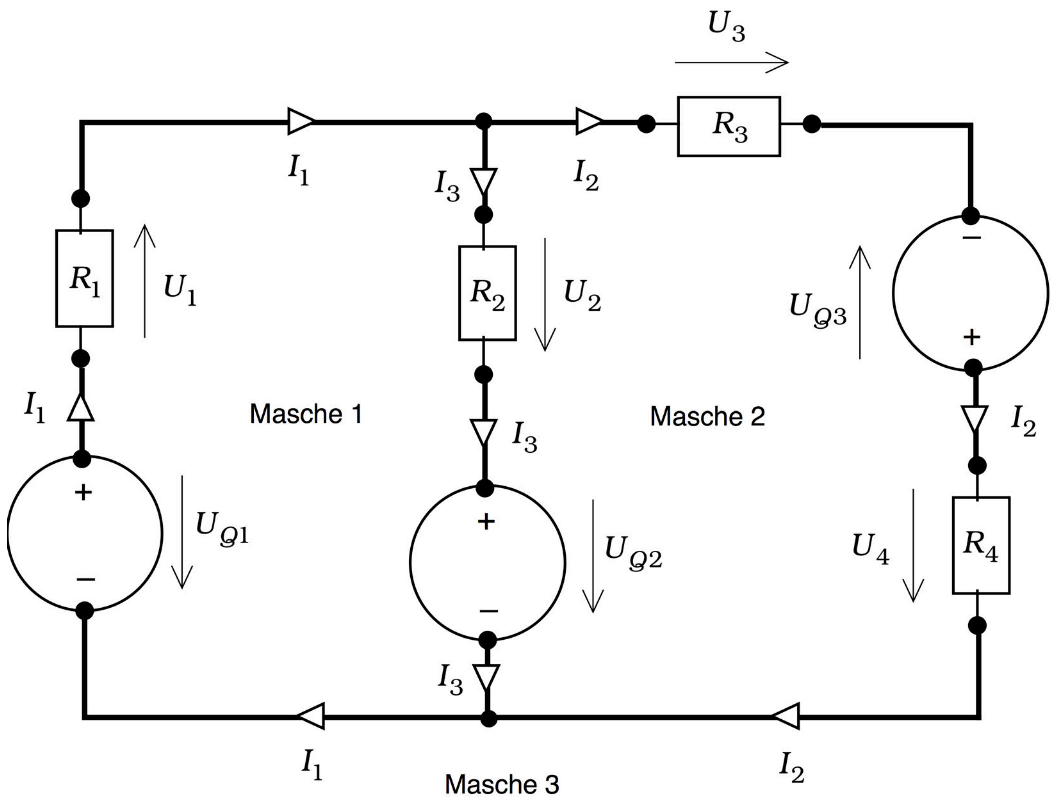
$$\boxed{U_1 + U_2 + U_3 - U_Q = 0}$$



Es gilt der **2. KIRCHHOFFsche Satz**:

Bei Umlauf in einem Stromkreis ist die Summe aller Spannungen null, wenn man die Spannungsabfälle in Stromrichtung (+→−) und die Quellenspannung in Polrichtung (+→−) der Spannungsquelle positiv ansetzt.

Bei einem verzweigten Stromkreis mit Verbrauchern und mehreren Stromquellen entstehen geschlossene Stromkreismaschen. Als Umlaufrichtung in diesen Maschen wählt man beispielsweise den Uhrzeigersinn. Wenn die Spannungspfeile in diese Umlaufrichtung zeigen, werden sie mit positivem, sonst mit negativem Vorzeichen in der Spannungssumme aufgenommen.



Zunächst folgt aus dem Knotensatz die Stromaufteilung

$$I_1 = I_2 + I_3$$

und in den drei Maschen, wenn sie jeweils im Uhrzeigersinn durchlaufen werden, erhält man die Spannungssummen

$$\begin{aligned} U_1 + U_2 + U_{Q2} - U_{Q1} &= 0 & \qquad U_1 + U_2 &= U_{Q1} - U_{Q2} \\ U_3 - U_{Q3} + U_4 - U_{Q2} - U_2 &= 0 & U_3 + U_4 - U_2 &= U_{Q2} + U_{Q3} \\ -U_{Q1} + U_1 + U_3 - U_{Q3} + U_4 &= 0 & U_1 + U_3 + U_4 &= U_{Q1} + U_{Q3} \end{aligned}$$

Wenn man die erste und zweite Gleichung addiert, ergibt sich die dritte; die drei Maschengleichungen sind also nicht unabhängig voneinander.

Für den Spannungsabfall in einem OHMschen Widerstand gilt das lineare **OHMsche Gesetz**

$$\boxed{U = R \cdot I}$$

Die Maßeinheit für den OHMschen Widerstand $R = \dfrac{U}{I}$ ist

$$1\ \text{Ohm} = 1\ \Omega := \frac{1\ \text{Volt}}{1\ \text{Ampere}}$$

Mit diesem Gesetz kann man die beiden voneinander unabhängigen Gleichungen der ersten und zweiten Masche

$$\begin{aligned} U_1 + U_2 &= U_{Q1} - U_{Q2} \\ U_3 + U_4 - U_2 &= U_{Q2} + U_{Q3} \end{aligned}$$

schreiben

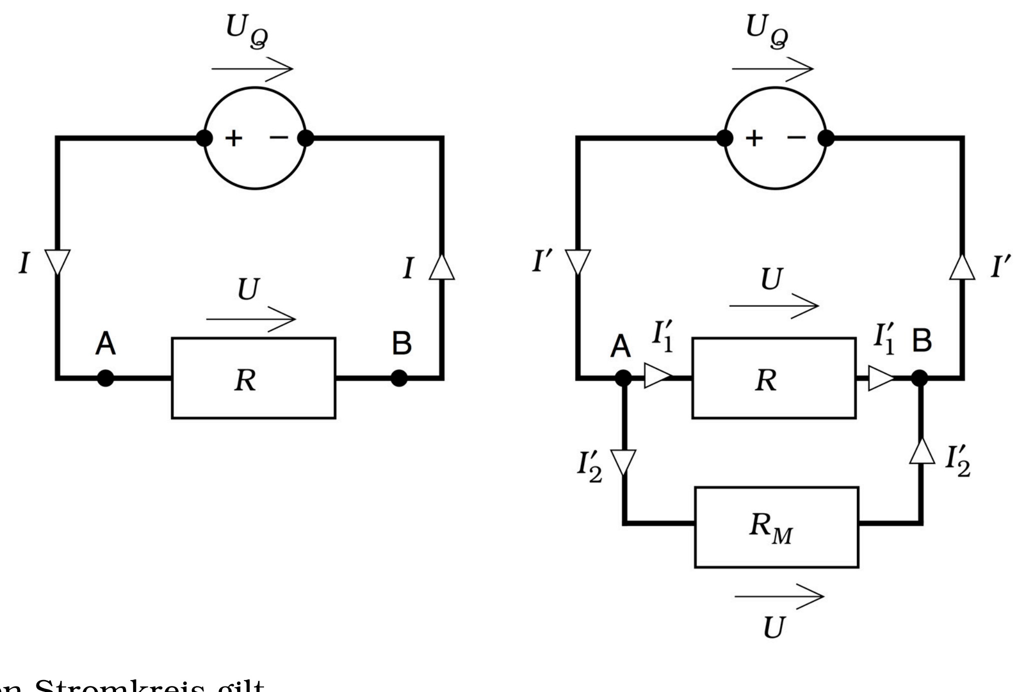
$$\begin{aligned} R_1 I_1 + R_2 I_3 &= U_{Q1} - U_{Q2} \\ R_3 I_2 + R_4 I_2 - R_2 I_3 &= U_{Q2} + U_{Q3} \end{aligned}$$

und mit der dritten Gleichung

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0$$

hat man drei lineare Gleichungen zur Berechnung der Stromstärken, wenn die drei Quellenspannungen und die vier Widerstände bekannt sind:

$$\begin{bmatrix} R_1 & 0 & R_2 \\ 0 & (R_3 + R_4) & -R_2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{Q1} - U_{Q2} \\ U_{Q2} + U_{Q3} \\ 0 \end{bmatrix}$$



Im linken Stromkreis gilt

$$\begin{aligned} U - U_Q &= 0 \\ U &= R\,I \end{aligned} \qquad I = \frac{U}{R}$$

und im rechten

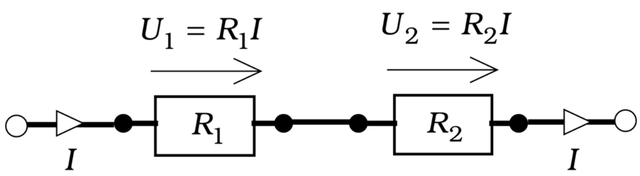
$$U - U_Q = 0 \qquad I' = I_1' + I_2' \qquad U = R\,I_1' \qquad I' = \frac{U}{R} + \frac{U}{R_M} = \frac{U}{R}\left(1 + \frac{R}{R_M}\right)$$
$$U - U = 0 \qquad\qquad\qquad U = R_M I_2'$$

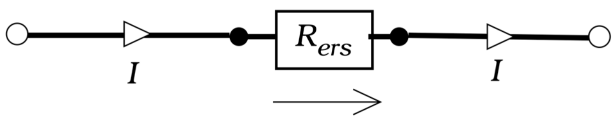
Der rechte Stromkreis beschreibt die **Spannungsmessung** zwischen den Punkten A und B mit einem Messgerät, das einen Innenwiderstand R_M hat. Der Spannungsquelle wird also mehr Strom entzogen $(I' > I)$, wenn das Messgerät angeschlossen ist. Um den Einfluss des Messgerätes möglichst klein zu halten, wählt man

$$R_M >> R \qquad \rightarrow \qquad \frac{R}{R_M} << 1 \qquad \rightarrow \qquad I' \approx I$$

Zur Vereinfachung von Schaltplänen dienen die folgenden Regeln:

Zwei **in Reihe geschaltete** Ohmschen Widerstände können durch einen Widerstand ersetzt werden.



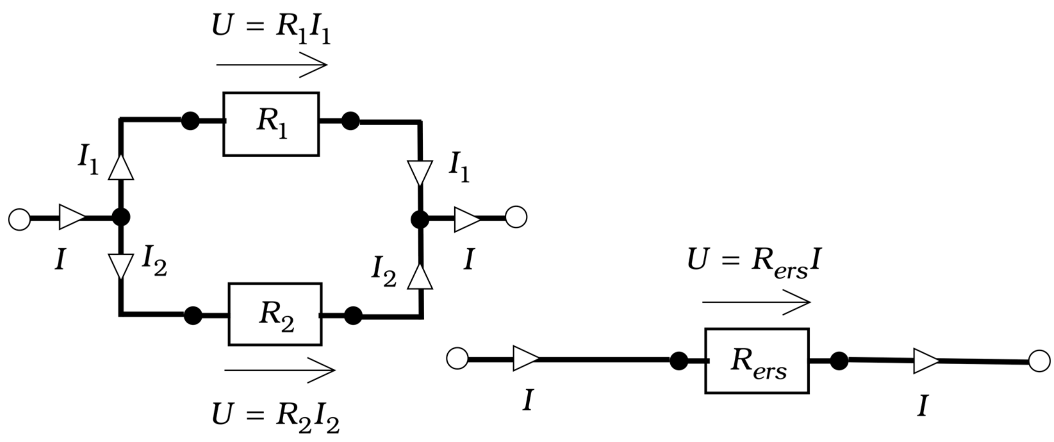


$$U = U_1 + U_2 = R_{ers} I$$

Dabei gilt

$$\boxed{R_{ers} = R_1 + R_2}$$

Sind die Widerstände **parallel geschaltet**

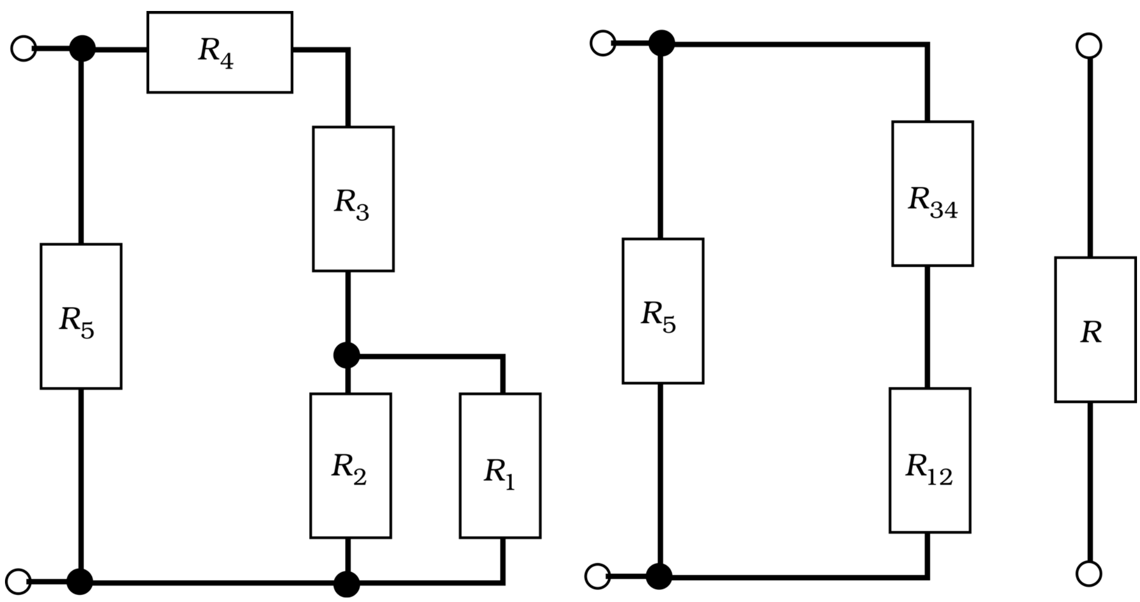


so folgt aus

$$I_1 + I_2 = I \qquad \rightarrow \qquad \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} = \frac{U}{R_{ers}}$$

$$\boxed{\frac{1}{R_{ers}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} \qquad R_{ers} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

Die folgenden drei Schaltbilder sind äquivalent, wenn die unten angegebenen Widerstandswerte beachtet werden.



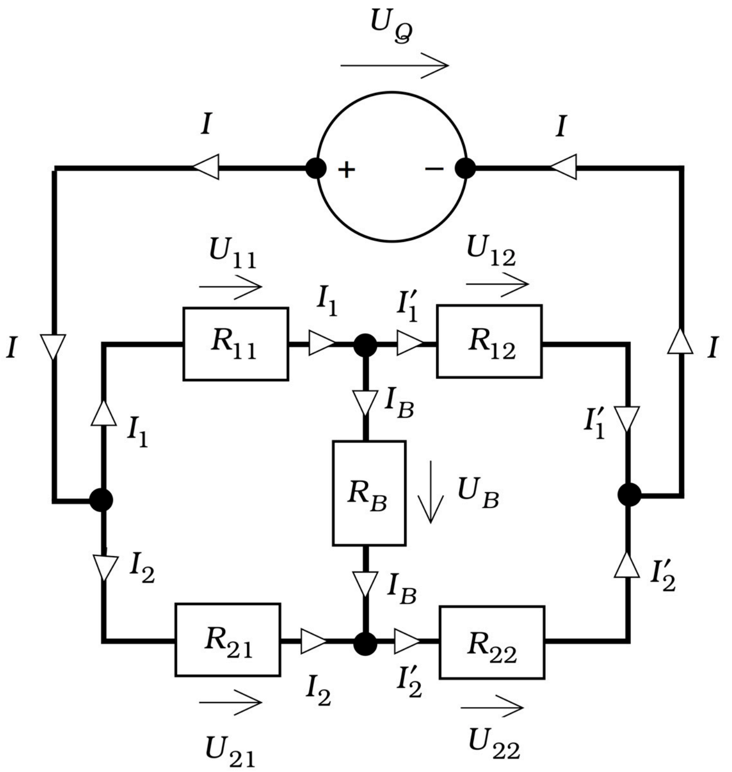
$$\frac{1}{R_{12}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \qquad \rightarrow \qquad R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

$$R_{34} = R_3 + R_4$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_{12} + R_{34}} \qquad \rightarrow \qquad \boxed{R = \frac{R_5\left(R_{12} + R_{34}\right)}{R_5 + R_{12} + R_{34}}}$$

✎ ______________________________

Nun soll der Stromverlauf in der **WHEATSTONEschen Brückenschaltung** bestimmt werden.



Insgesamt sind bei gegebener Quellenspannung sechs Stromstärken unbekannt. Zur Verfügung stehen die Gleichungen

$$I = I_1 + I_2 \qquad \begin{aligned} I_1 &= I_1' + I_B \\ I_2' &= I_2 + I_B \end{aligned} \qquad \begin{aligned} -U_{11} + U_{21} - U_B &= 0 \\ U_{22} - U_{12} + U_B &= 0 \\ U_{11} + U_{12} &= U_Q \end{aligned}$$

Wenn die Spannungen über das OHMsche Gesetz durch Stromstärken ersetzt werden, entstehen schließlich drei Gleichungen für I_1, I_2 und I_B:

$$\begin{aligned} -R_{11} I_1 + R_{21} I_2 - R_B I_B &= 0 \\ R_{22} I_2' - R_{12} I_1' + R_B I_B &= 0 \\ R_{11} I_1 + R_{12} I_1' &= U_Q \end{aligned} \qquad \begin{aligned} -R_{11} I_1 + R_{21} I_2 - R_B I_B &= 0 \\ R_{22}\left(I_2 + I_B\right) - R_{12}\left(I_1 - I_B\right) + R_B I_B &= 0 \\ R_{11} I_1 + R_{12}\left(I_1 - I_B\right) &= U_Q \end{aligned}$$

$$-R_{11} I_1 + R_{21} I_2 - R_B I_B = 0$$
$$-R_{12} I_1 + R_{22} I_2 + \left(R_{22} + R_{12} + R_B\right) I_B = 0$$
$$\left(R_{11} + R_{12}\right) I_1 - R_{12} I_B = U_Q$$

$$\begin{bmatrix} -R_{11} & R_{21} & -R_B \\ -R_{12} & R_{22} & \left(R_{12} + R_{22} + R_B\right) \\ \left(R_{11} + R_{12}\right) & 0 & R_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ U_Q \end{bmatrix}$$

Die Lösung dieses linearen Gleichungssystems liefert die gesuchten Stromstärken.

Für den Spezialfall

$$I_B = 0$$

muss das homogene Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -R_{11} I_1 + R_{21} I_2 &= 0 \\ -R_{12} I_1 + R_{22} I_2 &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} -R_{11} & R_{21} \\ -R_{12} & R_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

lösbar sein, und das ist nur der Fall, wenn

$$\det \begin{bmatrix} -R_{11} & R_{21} \\ -R_{12} & R_{22} \end{bmatrix} = \left(-R_{11} R_{22} + R_{12} R_{21}\right) = 0$$

wird, also die OHMschen Widerstände in den Parallelzweigen in dem Verhältnis

$$\boxed{\frac{R_{11}}{R_{12}} = \frac{R_{21}}{R_{22}}}$$

stehen. Ist $R_{11} = R_x$ ein unbekannter und $R_{12} = R_v$ ein messbar veränderlicher Widerstand, so kann man

$$R_x = \frac{R_{21}}{R_{22}} R_v$$

bestimmen, indem man R_v so verändert, dass die Stromstärke $I_B = 0$ wird. Damit steht eine Vorrichtung zur Bestimmung von Widerstandswerten zur Verfügung.

✎

Durchläuft eine positive Ladung ΔQ auf einer Strecke L ein elektrisches Feld E, so ist die vom elektrischen Feld an der positiven Ladung ΔQ verrichtete Arbeit

$$\Delta W = \int_0^L \underbrace{\left(\Delta Q E\right)}_{\text{Kraft}} ds = \underbrace{\Delta Q}_{I\Delta t} \cdot \underbrace{\int_0^L E ds}_{U} = I \cdot U \Delta t$$

Als Leistung ist definiert

$$P := \frac{\text{Arbeit}}{\text{Zeitdauer}} = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

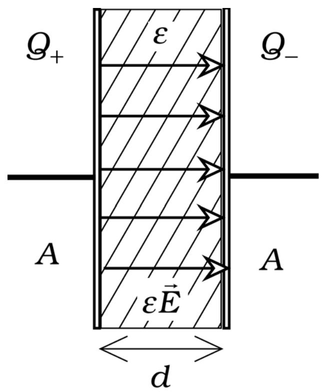
Also ist die momentane **Leistung** der Stromstärke I bei einer Spannung U

$$\boxed{P = I \cdot U = R \cdot I^2 = \frac{U^2}{R}}$$

Die Maßeinheit der Leistung ist

$$1 \text{ Watt} = 1 \text{ Volt} \cdot 1 \text{ Ampere}$$

✎



Zwei Metallplatten der Fläche A, die durch ein isolierendes Material im Abstand d voneinander getrennt gehalten werden, bilden einen **Kondensator**. Wird die eine Platte mit der positiven Ladung Q_+ und die andere mit der gleich großen aber negativen Ladung Q_- aufgeladen, so entsteht zwischen den beiden Platten ein elektrisches Feld $\vec{E}$ und die Spannung

$$\boxed{U = \frac{d}{\varepsilon A} Q}$$

Dabei ist ε die **Dielektrizitätskonstante** des Isoliermaterials zwischen den Platten. Man bezeichnet

$$\boxed{C := \varepsilon \frac{A}{d}}$$

als die **Kapazität** des Kondensators und damit ist

$$\boxed{U = \frac{Q}{C}}$$

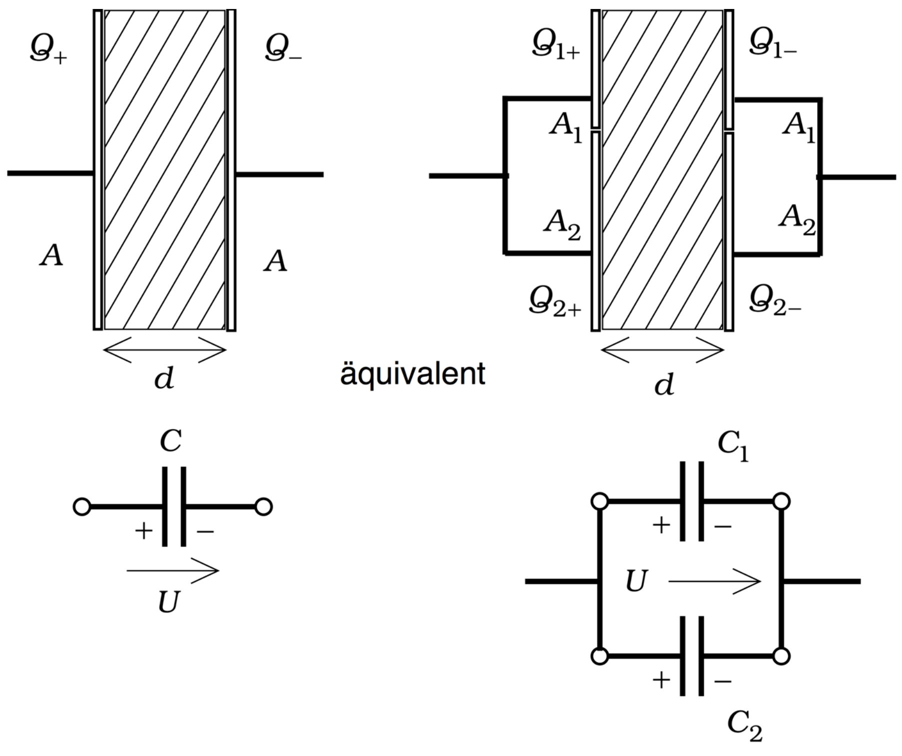
Die Maßeinheit der Kapazität ergibt sich aus dieser Beziehung

$$\frac{1\,\text{Ampere} \cdot \text{Sekunde}}{1\ \text{Volt}} = 1\ \text{Farad}$$

ε ist ein Vielfaches der **Elektrischen Feldkonstante**n ε_0.

Das Schaltsymbol besteht aus zwei parallelen Strichen senkrecht zum Leitungsstrich.

Wenn man die beiden Kondensatorplatten in jeweils zwei Teilflächen aufteilt,



entstehen zwei parallel geschaltete Kondensatoren mit anderer Kapazität und wenn beide Teilplatten mit den Ladungen (Q_{1+}, Q_{1-}) und (Q_{2+}, Q_{2-}) aufgeladen werden, wobei

$$Q_1 = Q\frac{A_1}{A}, \qquad Q_2 = Q\frac{A_2}{A} \qquad Q_1 + Q_2 = Q$$

bleibt, gilt

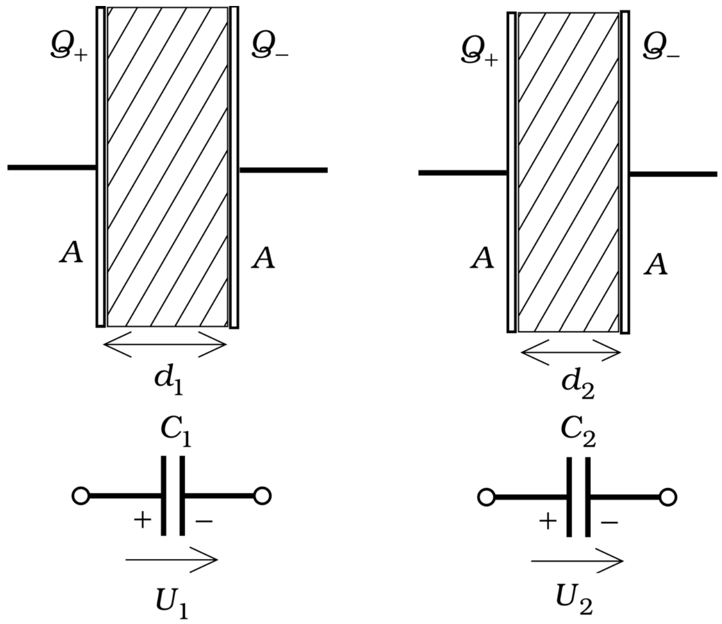
$$\frac{\varepsilon A_1}{d}U = C_1 U = Q_1 \qquad C_1 U + C_2 U = (C_1 + C_2)U = Q_1 + Q_2 = Q = CU$$
$$\frac{\varepsilon A_2}{d}U = C_2 U = Q_2$$

Zwei **parallel** geschaltete Kondensatoren mit den Kapazitäten C_1 und C_2 dürfen durch einen Kondensator mit der Kapazität

$$\boxed{C = C_1 + C_2}$$

ersetzt werden.

Werden zwei unterschiedliche Kondensatoren mit dem gleichen Ladungspaar (Q_+, Q_-) aufgeladen

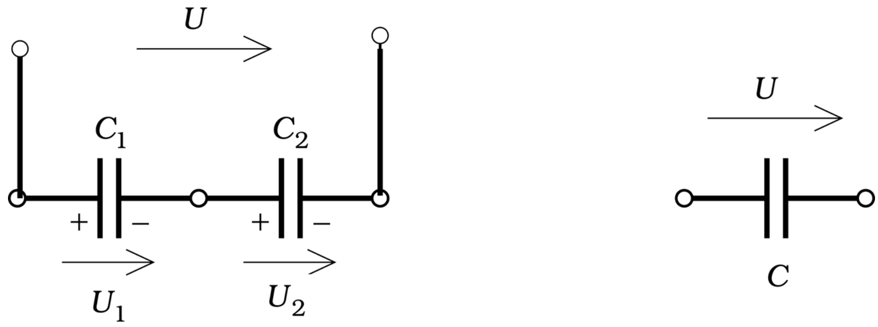


und anschließend miteinander verbunden, dann werden die beiden inneren Kondensatorplatten wegen der entgegengesetzt gleichen Ladungen ladungsfrei und es bleiben die beiden äußeren Platten mit dem Ladungspaar (Q_+, Q_-) übrig, aber der Abstand dieser Platten hat sich auf

$$d = d_1 + d_2$$

vergrößert.

$$U_1 = \frac{d_1}{\varepsilon A}Q = \frac{1}{C_1}Q \qquad U_2 = \frac{d_2}{\varepsilon A}Q = \frac{1}{C_2}Q$$



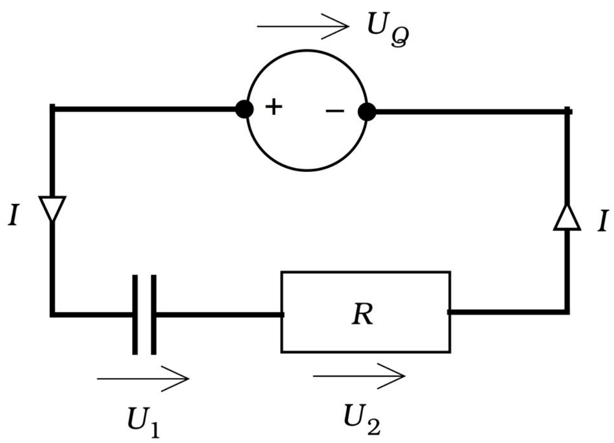
$$U_1 + U_2 = \frac{d_1}{\varepsilon A} Q + \frac{d_2}{\varepsilon A} Q = \frac{1}{C_1} Q + \frac{1}{C_2} Q = U = \frac{1}{C} Q$$

Zwei **in Reihe** geschaltete Kondensatoren mit den Kapazitäten C_1 und C_2 können also ersetzt werden durch einen Kondensator mit der Kapazität C, wenn

$$\boxed{\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$$

ist.

✎ ________________________________



Verbindet man einen zunächst ungeladenen Kondensator über einen Widerstand mit einer Spannungsquelle konstanter Quellenspannung $U_Q = U_0$, so entsteht ein Ladestrom $I(t)$ und es gilt

$$U_1(t) + U_2(t) - U_0 = 0$$

Daraus folgt

$$\frac{Q(t)}{C} + R\,I(t) = U_0 \qquad \frac{Q(t)}{C} + R\frac{dQ(t)}{dt} = U_0$$

$$\frac{dQ(t)}{dt} + \frac{Q(t)}{RC} = \frac{CU_0}{RC}$$

Nach Umstellung der Terme

$$\frac{dQ(t)}{dt} = -\lambda\left(Q(t) - CU_0\right) \qquad \lambda := \frac{1}{RC}$$

kommt man zu einer leicht zu lösenden Differentialgleichung für $Q(t)$:

$$\frac{1}{\left(Q(t) - CU_0\right)}\frac{dQ(t)}{dt} = -\lambda \qquad \rightarrow \qquad \frac{d}{dt}\ln\left(Q(t) - CU_0\right) = -\lambda$$

$$\ln\left(Q(t) - CU_0\right) = -\lambda t + A_1$$

$$\left(Q(t) - CU_0\right) = e^{-\lambda t + A_1} = \underbrace{e^{A_1}}_{=:A_2} e^{-\lambda t} = A_2\, e^{-\lambda t}$$

$$Q(t) = CU_0 + A_2\, e^{-\lambda t}$$

Weil zum Zeitpunkt $t = 0$ die Ladung auf dem Kondensator noch null sein soll, erhält man für die noch unbekannte Konstante A_2 aus der Gleichung

$$Q(0) = CU_0 + A_2\, e^{-\lambda \cdot 0} = CU_0 + A_2 = 0$$

$$A_2 = -CU_0$$

Nun lautet das Ergebnis

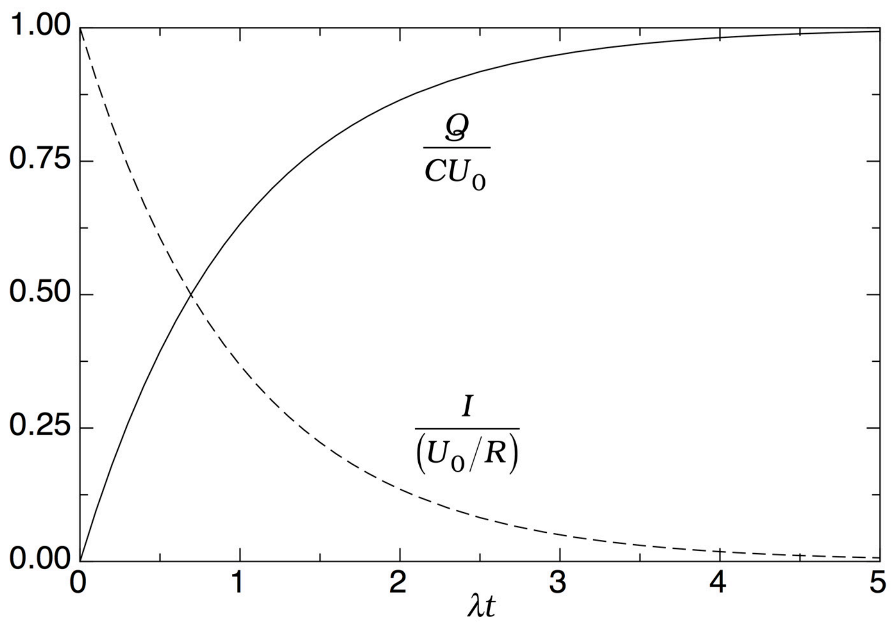
$$\boxed{Q(t) = CU_0\left(1 - e^{-\lambda t}\right) \qquad \lambda := \frac{1}{RC}}$$

Die entsprechende Stromstärke ist

$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = CU_0\left(0 + \lambda e^{-\lambda t}\right)$$

$$\boxed{I(t) = \frac{U_0}{R}\, e^{-\lambda t}}$$

In der folgenden Abbildung sind die Kondensatorladung und die Stromstärke als Funktionen des Zeitparameters λt dargestellt. Der Ladevorgang ist exponentiell abklingend.



✎ ______________________________

Auf die positive Ladung q_+, die sich in einem **Magnetfeld** $\vec{B}$ mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ bewegt, wirkt die **LORENTZkraft**

$$\boxed{\vec{F} = q_+\left(\vec{v} \times \vec{B}\right)}$$

Hat die Ladung die Masse m, so folgt aus der Bewegungsgleichung

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = q_+\left(\vec{v} \times \vec{B}\right)$$

Wenn man sie in Zylinderkoordinaten formuliert, erhält man in einem homogenen Magnetfeld in Richtung $\vec{e}_z$

$$\vec{B} = B\vec{e}_z$$

mit

$$\vec{v} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + \dot{z}\,\vec{e}_z$$

$$\vec{v} \times \vec{B} = \left(\dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi\right) \times B\vec{e}_z = -\dot{r}\,B\vec{e}_\varphi + r\dot{\varphi}B\vec{e}_r$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)\vec{e}_r + \left(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}\right)\vec{e}_\varphi + \ddot{z}\vec{e}_z$$

die drei Bewegungsgleichungen:

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = \frac{q_+B}{m}r\dot{\varphi}, \quad r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = -\frac{q_+B}{m}\dot{r}, \quad \ddot{z} = 0$$

Es existiert dann eine **spezielle** Lösung:

$$\boxed{r = r_0 = const \quad \dot{\varphi} = \omega_0 = const \quad z = z_0 = const}$$

$$0 - r_0\omega_0{}^2 = \frac{q_+B}{m} r_0\omega_0, \qquad r \cdot 0 + 2 \cdot 0 \cdot \omega_0 = -\frac{q_+B}{m} \cdot 0, \qquad 0 = 0$$

$$\boxed{\omega_0 = -\frac{q_+B}{m}}$$

Die Ladung q_+ kann sich, wenn das homogene Magnetfeld in Richtung $\vec{e}_z$ orientiert ist, auf einem beliebigen Kreis parallel zur xy-Ebene um die z-Achse mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit

$$\vec{\omega} = -\frac{q_+B}{m} \vec{e}_z$$

bewegen. Für einen Umlauf wird die Zeit T benötigt:

$$2\pi = |\omega_0| T$$

$$\boxed{T = 2\pi \frac{m}{q_+B}}$$

$f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{q_+B}{2\pi m}$ nennt man **Zyklotronfrequenz**.

✎ ______________________________

Befindet sich ein stromdurchflossener Leiter in einem Magnetfeld $\vec{B}$, dann wirkt auf die Ladung dQ_+ die Kraft

$$\boxed{d\vec{F} = dQ_+ \left(\vec{v} \times \vec{B}\right)}$$

Ist $\vec{s}$ der Ortsvektor der Ladung dQ_+ im Leiter, so folgt aus

$$\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt}, \qquad \text{und} \qquad I = \frac{dQ_+}{dt}$$

$$d\vec{F} = dQ_+ \left(\frac{d\vec{s}}{dt} \times \vec{B}\right) = \frac{dQ_+}{dt}\left(d\vec{s} \times \vec{B}\right) = I \cdot \left(d\vec{s} \times \vec{B}\right)$$

das **elektrodynamische Kraftgesetz**

$$\boxed{\vec{F} = I \cdot \int_{s_1}^{s_2} \left(d\vec{s} \times \vec{B} \right)}$$

für die resultierende Kraft, die das Magnetfeld $\vec{B}$ auf das vom Strom I durchflossene Leiterstück zwischen den Punkten $(s = s_1)$ und $(s = s_2)$ auf der Mittellinie des Leiters ausübt.

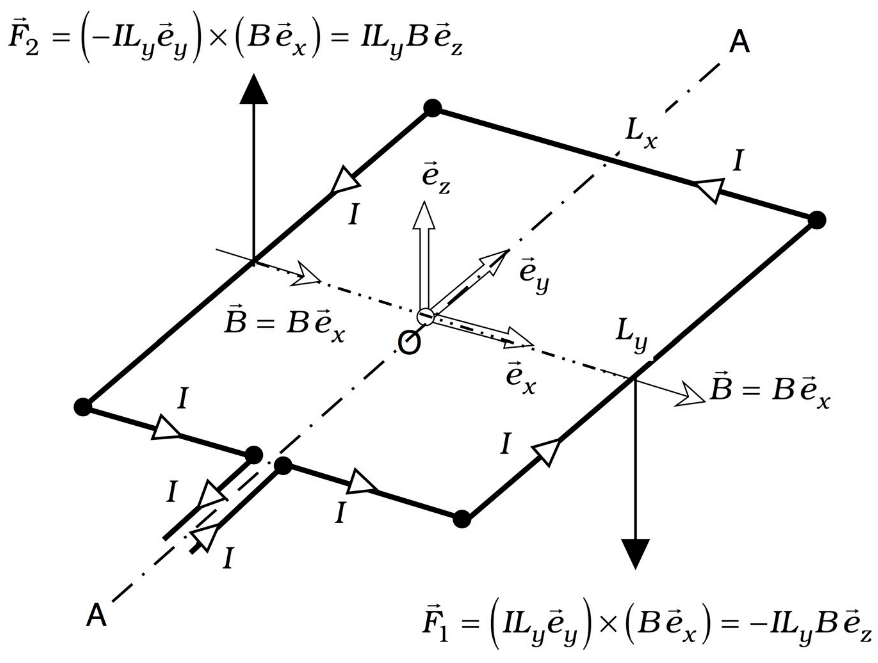
Ist insbesondere das Leiterstück der Länge L gerade in Richtung $\vec{e}_s$ und das Magnetfeld homogen (= ortsunabhängig), so wird

$$\boxed{\vec{F} = I \cdot L \cdot \vec{e}_s \times \vec{B}}$$

Wenn der Leiter parallel zum homogenen Magnetfeld ist, wird die Kraft null, wenn er senkrecht zum Magnetfeld orientiert ist, wird sie maximal.

Diese Wechselwirkung zwischen einem Strom in einer rechteckigen Leiterschleife mit den Kantenlängen L_x und L_y in der xy-Ebene und einem Magnetfeld lässt sich einfach berechnen, wenn das Magnetfeld $\vec{B}$ im Leiterbereich in $\vec{e}_x$-Richtung orientiert ist und in den zur y-Achse liegenden Abschnitten jeweils konstant und gleich groß ist.

Nur die parallel zur y- Achse liegenden Abschnitte werden dann durch entgegengesetzt gerichtete Kräfte belastet, deren Resultierende jeweils durch eine Einzelkraft in der Mitte des Leiterabschnitts ersetzt werden dürfen.



Die beiden Kräfte $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ bilden ein Kräftepaar mit dem Momentenvektor

$$\vec{M}_0 = \left(\frac{L_x}{2}\vec{e}_x\right)\times\vec{F}_1 + \left(-\frac{L_x}{2}\vec{e}_x\right)\times\vec{F}_2$$

und weil

$$\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$$

ist, wird

$$\vec{M}_0 = \left(L_x\vec{e}_x\right)\times\vec{F}_1 = \left(L_x\vec{e}_x\right)\times\left(-I\,L_y B\,\vec{e}_z\right) = I\,L_x L_y B\,\vec{e}_y$$

Wenn die Leiterschleife um die Achse AA drehbar gelagert und mit einer Drehfeder verbunden ist, die dann entspannt ist, wenn die Leiterschleife in der xy-Ebene liegt, dreht das Kräftepaar $\vec{M}_0$ die Leiterschleife um die Achse AA, bis das entgegen wirkende Federmoment genau so groß ist wie das von den Stromkräften erzeugte Moment. Ist die Leiterschleife mit einem Zeiger senkrecht zur Schleifenebene versehen, so kann man aus der Zeigerstellung auf einer geeichten Skala die Stromstärke I ablesen.

✎ ______________________________